www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1990

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

On se propose d'établir, dans ce problème, quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle notée E_λ :

$$y'' + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0 \quad , \lambda \text{ étant un nombre réel donné.}$$

On établit d'abord quelques résultats généraux qui pourront éventuellement être admis pour traiter les parties I, II, III.

⊙ Résultats préliminaires

1. Montrez que l'intégrale $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ existe pour tout réel s strictement positif.

   Vérifiez que $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ quel que soit $s > 0$.

2. Montrez que l'intégrale $I(s,v) = \int_0^\infty e^{-[t + v^2t^2]} t^{s-1} dt$ existe pour tout réel v, et tout réel $s > 0$.

   Vérifiez : $0 \leqslant 1 - e^{-v^2t^2} \leqslant v^2t^2$ quel que soit le couple $(v,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   Montrez que I(s,v) possède une limite quand v tend vers 0, et précisez cette limite.

3. Montrez que l'intégrale $J(s,x) = \int_0^\infty e^{-\left[xt + \frac{t^2}{2}\right]} t^{s-1} dt$ existe pour tout réel x et tout réel $s > 0$.

4. On suppose $s > 0$.
   Soit x_0 un réel donné, montrez que la suite de fonctions :

   $$x \longmapsto J_n[s+1,x] = \int_0^n e^{-\left[xt + \frac{t^2}{2}\right]} t^s dt \text{ converge uniformément sur la}$$

   demi droite $[x_0, +\infty[$ vers $J(s+1,x)$.
   En déduire que la fonction $x \longmapsto J(s,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et précisez $\frac{\partial}{\partial x} J(s,x)$.

Partie I

1. Pour quelles valeurs du paramètre λ existe-t-il des solutions de E_λ de la forme $y = e^{\alpha x^2}$ (α étant un réel à déterminer) ?
   Déterminez dans ces cas toutes les solutions de l'équation E_λ (l'expression de ces solutions contient un signe d'intégration).

2. Montrez que y est solution de E_λ si et seulement si $z = e^{\frac{x^2}{4}} y$ est solution de l'équation F_λ : $z'' - xz' + m(\lambda)z = 0$
   où l'application $\lambda \longmapsto m(\lambda)$ est à déterminer.

3. Montrez qu'il existe deux suites réelles $n \longmapsto a_n$ et $n \longmapsto b_n$ telles que
   (i) : $a_0 = b_0 = 1$.
   (ii) : les séries entières $\sum a_n x^{2n}$ et $\sum b_n x^{2n+1}$ sont convergentes quel que soit x réel.
   (iii) : $z_1(x) = \sum_0^\infty a_n x^{2n}$ et $z_2(x) = \sum_0^\infty b_n x^{2n+1}$ sont solutions de F_λ.

4. Déterminez la solution $y_{\alpha,\beta}$ de E_λ telle que $y_{\alpha,\beta}(0) = \alpha$ et $y'_{\alpha,\beta}(0) = \beta$ en fonction de z_1 et z_2.

Partie II

On suppose dans cette partie II que λ est un réel strictement négatif.

1. Soit γ un réel positif donné, calculez $\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-xt - \frac{t^2}{2}} t^\gamma\right]$ pour tout réel $t > 0$.

2. Montrez que l'application $x \longmapsto J(-\lambda,x)$ est solution de l'équation différentielle F_λ.

   (On rappelle cf. ⊙ : $J(-\lambda,x) = \int_0^\infty e^{-\left[xt + \frac{t^2}{2}\right]} t^{-\lambda-1} dt$).

3. Montrez que $J(-\lambda,x) = x^\lambda \int_0^\infty e^{-\left[u + \frac{u^2}{2x^2}\right]} u^{-(1+\lambda)} du$ pour tout $x > 0$ et en déduire un équivalent simple de $J(-\lambda,x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrez que $J(-\lambda,x) = A(\lambda)\,\Gamma(-\frac{\lambda}{2}) z_1(x) + B(\lambda)\,\Gamma(\frac{1-\lambda}{2}) z_2(x)$
   les applications $\lambda \longmapsto A(\lambda)$ et $\lambda \longmapsto B(\lambda)$ étant à expliciter.

5. Déterminez un équivalent simple de $e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

Partie III

On étudie dans cette partie les solutions de l'équation différentielle E_n :

$y'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4})y = 0$ où n désigne un entier naturel.

1. Soient n et p deux entiers naturels distincts, y_n une solution de E_n et y_p une solution de E_p, montrez que :

$$(p - n)y_n y_p = \frac{d}{dx}\left[y'_n y_p - y_n y'_p\right].$$

2. Montrez que pour tout entier n il existe une unique solution de F_n qui soit un polynôme unitaire de degré n noté H_n.
Calculez H_0, H_1, H_2, H_3.

3. Montrez que $\frac{dH_n}{dx}(x) = nH_{n-1}(x)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Soit $h_n = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n$, montrez que $h'_n(x) + \frac{x}{2} h_n(x) = nh_{n-1}(x)$ pour tout $n \geqslant 1$.

4. Montrez que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)H_p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)h_p(x)\,dx$ existe quel que soit le couple d'entiers naturels (n,p) et que cette intégrale est nulle si n et p sont distincts.

5. Montrez que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(H_n(x)\right)^2 dx = \frac{1}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(H_{n+1}(x)\right)^2 dx$

et précisez la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(H_n(x)\right)^2 dx$ en fonction de n.

$\left[\text{On admettra : } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\right]$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail